14 整数の種々の問題

101

$\mathrm{abc}_{(7)}$， $\mathrm{bca}_{(5)}$ は 3 桁の数だから，1 桁の数 a, b, c の値の範囲は，

$1 \le \mathrm{a} \le 4,\ 1 \le \mathrm{b} \le 4,\ 0 \le \mathrm{c} \le 4$ ・・・①

$\mathrm{abc}_{(7)}$ を 10 進法で表すと， $\mathrm{a} \cdot 7^2 + \mathrm{b} \cdot 7^1 + \mathrm{c} \cdot 7^0 = 49\mathrm{a} + 7\mathrm{b} + \mathrm{c}$ ・・・②

$\mathrm{bca}_{(5)}$ を 10 進法で表すと， $\mathrm{b} \cdot 5^2 + \mathrm{c} \cdot 5^1 + \mathrm{a} \cdot 5^0 = 25\mathrm{b} + 5\mathrm{c} + \mathrm{a}$ ・・・③

よって， $49\mathrm{a} + 7\mathrm{b} + \mathrm{c} = 25\mathrm{b} + 5\mathrm{c} + \mathrm{a}$ より， $\mathrm{c} = 12\mathrm{a} - \dfrac{9}{2}\mathrm{b}$ ・・・④

①，④より，b は 2 または 4

$\mathrm{b} = 2$ のとき

④より， $\mathrm{c} = 12\mathrm{a} - 9$

これと①より， $\mathrm{a} = 1,\ \mathrm{c} = 3$

$\mathrm{b} = 4$ のとき

④より， $\mathrm{c} = 12\mathrm{a} - 18$

したがって，①を満たす a と c は存在しない。

以上より， $(\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}) = (1,\ 2,\ 3)$

これを②または③に代入することにより，求める 10 進数は 66

102

(1)

$f(1) = 1 + a + b$ より， $a + b = f(1) - 1$ ・・・①

$f(-1) = -1 + a - b$ より， $a - b = f(-1) + 1$ ・・・②

①と②の連立方程式を解くことにより， $a = \dfrac{f(1) + f(-1)}{2}$， $b = \dfrac{f(1) - f(-1) - 2}{2}$

(2)

(1)より，

$$f(n) = n^3 + \frac{f(1) + f(-1)}{2} n^2 + \frac{f(1) - f(-1) - 2}{2} n$$
$$= n^3 - n + \frac{n(n+1)}{2} \cdot f(1) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot f(-1)$$

ここで， $n(n+1),\ n(n-1)$ は連続する 2 つの整数の積だから偶数である。

よって， $f(n)$ は整数である。

103

(1)

$f(3^6)-f(3)=f(27^2)-3=9-3=6$

(2)

解法 1

$n=10a+b$ （a, b は負でない整数で少なくとも一方は 0 でない）とおくと，

$f(n)=f(b)$， $f(n^5)=f(b^5)$ より， $f(n^5)-f(n)=f(b^5)-f(b)$

これと，

$b=0$ のとき　$f(0^5)=0=f(0)$， $b=1$ のとき　$f(1^5)=1=f(1)$，

$b=2$ のとき　$f(2^5)=2=f(2)$， $b=3$ のとき　$f(3^5)=3=f(3)$，

$b=4$ のとき　$f(4^5)=4=f(4)$， $b=5$ のとき　$f(5^5)=5=f(5)$，

$b=6$ のとき　$f(6^5)=6=f(6)$， $b=7$ のとき　$f(7^5)=7=f(7)$，

$b=8$ のとき　$f(8^5)=8=f(8)$， $b=9$ のとき　$f(9^5)=9=f(9)$

より， $f(n^5)-f(n)=f(b^5)-f(b)=0$

解法 2

$f(n^5)-f(n)=0 \Leftrightarrow n^5$ の一の位の数と n の一の位の数が等しい

$\Leftrightarrow n^5-n$ の一の位の数が $0 \Leftrightarrow n^5-n$ は 10 の倍数である。

$$
\begin{aligned}
n^5-n &= n(n^4-1) \\
&= n(n^2-1)(n^2+1) \\
&= n(n-1)(n+1)(n^2+1) \\
&= n(n-1)(n+1)\{(n^2-4)+5\} \\
&= n(n-1)(n+1)\{(n-2)(n+2)+5\} \\
&= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)
\end{aligned}
$$

ここで，連続する 5 つの自然数は 2 の倍数と 5 の倍数を含む。

また，連続する 3 つの自然数は 2 の倍数を含む。

よって， n^5-n は 10 の倍数である。ゆえに， $f(n^5)-f(n)=0$ が成り立つ。

104

整数解をα，β（$\alpha \leq \beta$）とする。

解と係数の関係より，

$\alpha+\beta=3k$　すなわち$k=\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta$　・・・①

$\alpha\beta=2k$　・・・②

①を②に代入すると，$\alpha\beta=\frac{2}{3}\alpha+\frac{2}{3}\beta$　$\therefore\left(\alpha-\frac{2}{3}\right)\left(\beta-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$

この両辺に 9 を掛けると，$(3\alpha-2)(3\beta-2)=4$

これと$\alpha \leq \beta$より，$(3\alpha-2,\ 3\beta-2)=(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$，$(-4,\ -1)$，$(-2,\ -2)$

これを解くことにより，整数解α，βを求めると，$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2)$，$(0,\ 0)$

これと①より，

$k=0$のとき，整数解は 0（重解）

$k=1$のとき，整数解は 1 と 2

105

解法 1

$x^2+mx+8=0$の解は$\dfrac{-m\pm\sqrt{m^2-32}}{2}$

これが有理数をもつためには,

$\sqrt{m^2-32}=\dfrac{p}{q}$（$p,\ q$は互いに素な自然数）と表されることが必要

$\sqrt{m^2-32}=\dfrac{p}{q}$の両辺を 2 乗すると，$m^2-32=\dfrac{p^2}{q^2}$

これと，m^2-32が自然数であることから，$q=1$

よって、$m^2-32=p^2$

これより，$(m+p)(m-p)=32$

また，$m,\ p$は自然数だから，$m+p>m-p$

よって，$(m+p,\ m-p)=(32,\ 1),\ (16,\ 2),\ (8,\ 4)$

それぞれを解いて得られる自然数mは，$m=9,\ 6$

よって，$\sqrt{m^2-32}=7,\ 4$となり，解は有理数である。

ゆえに，$m=6,\ 9$

解法 2

$x=0$ は解でないから，有理数解を $\dfrac{p}{q}$ （$p,\ q$ は互いに素な整数）とおくと，

$\dfrac{p^2}{q^2}+m\cdot\dfrac{p}{q}+8=0 \quad \therefore m\cdot\dfrac{p}{q}+8=-\dfrac{p^2}{q^2}$

両辺に q を掛けると，$mp+8q=-\dfrac{p^2}{q}$

左辺は整数であることと $p,\ q$ は互いに素な整数であることから，$q=\pm1$

よって，解は整数である。

そこで，整数解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-m<0,\ \alpha\beta=8$ だから，

$\alpha\leq\beta<0$ かつ $\alpha\beta=8 \quad \therefore(\alpha,\ \beta)=(-8,\ -1),\ (-4,\ -2)$

これと $\alpha+\beta=-m$ より，$m=9,\ 6$

106

(1)

解法 1

0 は解でないから，有理数解 $\alpha=\dfrac{p}{q}$ （$p,\ q$ は互いに素な整数）とおくと，

$\left(\dfrac{p}{q}\right)^3+m\left(\dfrac{p}{q}\right)^2+(m+8)\cdot\dfrac{p}{q}+1=0 \quad \therefore m\left(\dfrac{p}{q}\right)^2+(m+8)\cdot\dfrac{p}{q}+1=-\left(\dfrac{p}{q}\right)^3$

両辺に q^2 を掛けると，$mp^2+(m+8)pq+q^2=-\dfrac{p^3}{q}$

左辺は整数であることと $p,\ q$ は互いに素な整数であることから，$q=\pm1$

よって，α は整数である。

解法 2

0 は解でないから，有理数解 $\alpha=\dfrac{p}{q}$ （$p,\ q$ は互いに素な整数）とおくと，

$\left(\dfrac{p}{q}\right)^3+m\left(\dfrac{p}{q}\right)^2+(m+8)\cdot\dfrac{p}{q}+1=0$

両辺に q^3 を掛けると，$p^3+mp^2q+(m+8)pq^2+q^3=0$

$\therefore p^3=q\left\{mp^2+(m+8)pq+q^2\right\}$

p^3 は q の倍数であることと $p,\ q$ は互いに素な整数であることから，$q=\pm1$

よって，α は整数である。

(2)

$\alpha^3+m\alpha^2+(m+8)\alpha+1=0$ より，$\alpha(\alpha^2+m\alpha+m+8)=-1$

α は整数だから，$\alpha=\pm1$

$\alpha=1$ のとき

$\alpha^2 + m\alpha + m + 8 = -1$

これと $\alpha^2 + m\alpha + m + 8 = 1 + m + m + 8 = 2m + 9$ より，$2m + 9 = -1$　$\therefore m = -5$

$\alpha = -1$ のとき

$\alpha^2 + m\alpha + m + 8 = 1$

これと $\alpha^2 + m\alpha + m + 8 = 1 - m + m + 8 = 9$ より，$9 = -1$ となり不適

以上より，$m = -5$

107

(1)

$3x > 0,\ x^2 + 2 > 0$ より，$3x \geq x^2 + 2$ が成り立つことが必要であり，

これが成り立つ x は，$3x \geq x^2 + 2$ を解くことにより，$x = 1, 2$

また，$x = 1$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2} = 1$，$x = 2$ のとき $\dfrac{3x}{x^2+2} = 1$ より，$\dfrac{3x}{x^2+2}$ は自然数

よって，$x = 1, 2$

(2)

$x = 1, 2$ のとき

(1)より，$\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y} = 1 + \dfrac{1}{y}$　$\therefore y = 1$

$x \geq 3$ のとき

(1)より，$0 < \dfrac{3x}{x^2+2} < 1$　これと $0 < \dfrac{1}{y} \leq 1$ より，$0 < \dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y} < 2$

よって，$\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y}$ が自然数ならば $\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y} = 1$　・・・①

また，$0 < \dfrac{3x}{x^2+2} < 1$ だから，$\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y}$ が自然数ならば $\dfrac{1}{y}$ は整数ではない。

よって，$y \geq 2$ より，$0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{2}$

したがって，必要条件は $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{3x}{x^2+2}$　・・・②

②の両辺に $2\left(x^2+2\right)$ を掛け，これを整理すると，$x^2 - 6x + 2 \leq 0$　$\therefore 3 - \sqrt{7} \leq x \leq 3 + \sqrt{7}$

これと $x \geq 3,\ 5 < 3 + \sqrt{7} < 6$ より，②を満たす x は $3, 4, 5$

そこで，それぞれを①に代入し，①が自然数となるか調べる。

$x = 3$ のとき

$\dfrac{9}{11} + \dfrac{1}{y} = 1$ より，$y = \dfrac{11}{2}$　よって，不適

$x = 4$ のとき

$\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{y}=1$ より，$y=3$　よって，①は自然数となる。

$x=5$ のとき

$\dfrac{5}{9}+\dfrac{1}{y}=1$ より，$y=\dfrac{9}{4}$　よって，不適

以上より，$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (4,\ 3)$

補足

$x\geq 3$ のときを①に頼らないで解く場合

$x=3$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=\frac{9}{11}+\frac{1}{y}=\frac{9y+11}{11y}$$

分子と分母の差をとると，$(9y+11)-11y=-2y+11$ より，奇数となる。

すなわち，分母と分子の偶奇が一致しない。

よって，$\dfrac{9y+11}{11y}$ は自然数になれない。

$x=4$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=\frac{2}{3}+\frac{1}{y}=\frac{2y+3}{3y}$$

$2y+3\geq 3y$ すなわち $y\leq 3$ が必要だから，これを満たす y は $1,\ 2,\ 3$

これらのうち $\dfrac{2y+3}{3y}$ が自然数となる y は 3 である。

$x=5$ のとき

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=\frac{5}{9}+\frac{1}{y}=\frac{5y+9}{9y}$$

$x=3$ のときと同様，分母と分子の偶奇が一致しない。

よって $\dfrac{5y+9}{9y}$ は自然数になれない。

108

直角三角形の 3 辺の長さを $a,\ b,\ c$， c を斜辺の長さとすると，

三平方の定理より， $a^2+b^2=c^2$ ・・・①

面積は $\dfrac{ab}{2}$ ・・・②

$a,\ b$ がともに偶数のとき

$a=2k,\ b=2l$ （$k,\ l$ は整数）とおくと，①のとき， $4k^2+4l^2=c^2$

よって， $c=2m$ とおくと， m は $m^2=k^2+l^2$ を満たす自然数であればよく，
たとえば， $(k,\ l,\ m)=(3,\ 4,\ 5)$ はこれを満たす。

したがって，①を満たす c は存在し，このとき，②より，面積は $\dfrac{ab}{2}=2kl$

すなわち 2 の整数倍である。

$a,\ b$ のどちらか一方が奇数のとき

$a=2k,\ b=2l+1$ （$k,\ l$ は整数）とおくと，①のとき， $4(k^2+l^2+l)+1=c^2$

よって， c^2 を 4 で割った余りは 1 であり， $c=2m+1$ （m は自然数）とおくと，
$c^2=4(m^2+m)+1$ となり，これを満たす。

このような $a,\ b,\ c$ にはたとえば， $(a,\ b,\ c)=(4,\ 3,\ 5)$ がある。

このとき， $4(k^2+l^2+l)+1=4(m^2+m)+1$ より， $k^2+l^2+l=m^2+m$

$\therefore k^2=(m-l)(m+l+1)$

ここで， $m+l+1$ と $m-l$ の差をとると， $(m+l+1)-(m-l)=2l+1$ より，奇数となる。

よって， $m+l+1$ と $m-l$ の偶奇が一致しない。

すなわち $m+l+1$ と $m-l$ のどちらか一方は偶数である。

よって， k^2 は偶数，すなわち， k は偶数である。

これより， a は 4 の倍数となるから，面積は $\dfrac{ab}{2}$ は 2 の整数倍である。

$a,\ b$ がともに奇数のとき

$a=2k+1,\ b=2l+1$ （$k,\ l$ は整数）とおくと，

①のとき， $4(k^2+l^2+k+l)+2=c^2$

よって， c は c^2 を 4 で割った余りが 2 となるような数であればよい。

ところが，

$c=2m$ （m は自然数）とおくと， $c^2=4m^2$

$c=2m+1$ （m は自然数）とおくと， $c^2=4(m^2+m)+1$

となり， c^2 を 4 で割っても余りは 1 とならない。

よって， $a,\ b$ がともに奇数となるような直角三角形は存在しない。

以上より，直角三角形の 3 辺の長さがすべて整数のとき，面積は 2 の整数倍である。

109

(1)

$$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x$$
$$=\frac{x(2x+3)}{6}$$

より，

$x=6k$ （k は整数）とおくと， $y=2k^2+3k$ となり， y も整数である。

よって， $(6k,\ 2k^2+3k)$は格子点である。

また，整数k は無限個存在する。

ゆえに，格子点は無限個存在する。

(2)

$y=ax^2+bx$ のグラフ上の点$(0,\ 0)$以外の 2 つの格子点を$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)$とおくと，

$y_1=ax_1{}^2+bx_1$　・・・①

$y_2=ax_2{}^2+bx_2$　・・・②

①$\times x_2-$②$\times x_1$ より， $x_2y_1-x_1y_2=ax_1x_2(x_1-x_2)$

①$\times x_2{}^2-$②$\times x_1{}^2$ より， $x_2{}^2y_1-x_1{}^2y_2=bx_1x_2(x_2-x_1)$

$x_1\neq x_2,\ x_1\neq 0,\ x_2\neq 0$ より， $x_1x_2(x_1-x_2)\neq 0$

$$\therefore (a,\ b)=\left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_1x_2(x_1-x_2)},\ \frac{x_1{}^2y_2-x_2{}^2y_1}{x_1x_2(x_1-x_2)}\right)$$

ゆえに，

$$y=ax^2+bx$$
$$=\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_1x_2(x_1-x_2)}x^2+\frac{x_1{}^2y_2-x_2{}^2y_1}{x_1x_2(x_1-x_2)}x$$
$$=\frac{x}{x_1x_2(x_1-x_2)}\left\{(x_2y_1-x_1y_2)x+x_1{}^2y_2-x_2{}^2y_1\right\}$$

ここで， $x=kx_1x_2(x_1-x_2)$（k は整数）とおくと，

$y=k^2x_1x_2(x_1-x_2)(x_2y_1-x_1y_2)+k(x_1{}^2y_2-x_2{}^2y_1)$

これと， $k,\ x_1,\ x_2$ は整数であることから，

$y=ax^2+bx$ のグラフ上の点$\left(kx_1x_2(x_1-x_2),\ k^2x_1x_2(x_1-x_2)(x_2y_1-x_1y_2)+k(x_1{}^2y_2-x_2{}^2y_1)\right)$

は格子点であり，整数k は無限個存在する。

よって，格子点は無限個存在する。